Опр. 1 Функцией n переменных наз-ся отображение $f: X \to Y$, где $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}$. X – область определения, Y – мн-во значений. Пишут: $y = f(\vec{x})$ или $y = f(x_1, \dots, x_n)$

Опр. 2 (предел ф-ции по Гейне). Число $b \in \mathbb{R}$ наз-ся пределом ф-ции f в точке $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, если $\forall$ посл-ти $\{\vec{x}^m\}$, $\vec{x}^m \in X$, $\vec{x}^m \neq \vec{a}$, $\vec{x}^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} \vec{a}$: $\lim\limits_{m\to+\infty} f(\vec{x}^m) = b$

Опр. 3 (предел ф-ции по Коши). Число $b \in \mathbb{R}$ наз-ся пределом ф-ции f в точке $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\underbrace{\forall \vec{x} \in X,\ 0 < \rho(\vec{x}, \vec{a}) < \delta}_{\forall \vec{x} \in \mathring{B}_\delta(\vec{a}) \cap X}$: $|f(\vec{x}) - b| < \varepsilon$.

Пишут: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = b$ или $\lim\limits_{\substack{x_1\to a_1\\ \dots\\ x_n\to a_n}} f(x_1, \dots, x_n) = b$

$f(\vec{x}) \xrightarrow[\vec{x}\to\vec{a}]{} b$

Замеч-е: 1) В опр-ях 2, 3 предполагается, что $\vec{a}$ – предельная точка X.

2) Опр-я 2 и 3 эквивалентны (док-во полностью аналогично одномерному случаю).

3) Если $b = +\infty, -\infty, \infty$: опр-я 2 сохраняется; в опр-и 3 итоговое нер-во заменяется на: $f(\vec{x}) > \frac{1}{\varepsilon}$; $f(\vec{x}) < -\frac{1}{\varepsilon}$; $|f(\vec{x})| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Опр. 4 Число $b \in \mathbb{R}$ наз-ся пределом ф-ции f при $\vec{x} \to \infty$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\underbrace{\forall \vec{x} \in X,\ \|\vec{x}\| > \frac{1}{\delta}}_{X \cap \mathring{B}_\delta(\infty)}$: $|f(\vec{x}) - b| < \varepsilon$.

Т. 1 (арифм. операции над ф-циями, имеющими предел в точке). Пусть f, g определены на мн-ве X; $\vec{a}$ – предельная точка X; $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = b$, $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} g(\vec{x}) = c$.

Тогда $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} (f(\vec{x}) \pm g(\vec{x})) = b \pm c$; $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} (f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x})) = b \cdot c$; если $c \neq 0$, то $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \frac{b}{c}$.

Д-во: Пусть $\vec{x}^m \in X$, $\vec{x}^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} \vec{a}$, $\vec{x}^m \neq \vec{a}$. Тогда $f(\vec{x}^m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} b$, $g(\vec{x}^m) \xrightarrow[m\to+\infty]{} c$. Из теоремы для числовых посл-тей и опр-я 2 следует утв-е теоремы. **ч.т.д.**

Опр. 5 Пусть $\vec{a}$ – предельная точка X ($\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ или $\vec{a} = \infty$). Ф-ция f удовл-т условию Коши в точке $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ (при $\vec{x} \to \infty$), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \vec{x}', \vec{x}'' \in X$, $0 < \rho(\vec{x}', \vec{a}) < \delta$, $0 < \rho(\vec{x}'', a) < \delta$ $\left(\|\vec{x}'\| > \frac{1}{\delta}, \|\vec{x}''\| > \frac{1}{\delta}\right)$: $|f(\vec{x}') - f(\vec{x}'')| < \varepsilon$.

Т. 2 (критерий Коши сущ-ния предела ф-ции) ф-ция f имеет конечный предел в точке $\vec{a}$ $\Leftrightarrow$ f удовл-т усл-ю Коши в этой точке.

Д-во: $\Rightarrow$ Пусть $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = b$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, т.ч. $\forall \vec{x} \in \mathring{B}_\delta(\vec{a}) \cap X$: $|f(\vec{x}) - b| < \varepsilon/2$. Значит, $\forall \vec{x}', \vec{x}'' \in \mathring{B}_\delta(\vec{a}) \cap X$:

$|f(\vec{x}') - f(\vec{x}'')| \leq |f(\vec{x}') - b| + |f(\vec{x}'') - b| < \varepsilon$.

$\Leftarrow$ Рассм. посл-ть $\{\vec{x}^m\}$, т.ч. $\vec{x}^m \in X$, $\vec{x}^m \xrightarrow[m\to+\infty]{} \vec{a}$, $\vec{x}^m \neq \vec{a}$. Возьмем δ из усл-я Коши; $\exists N(\delta) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall m \geq N$: $\vec{x}^m \in \mathring{B}_\delta(\vec{a}) \cap X$. Тем более, $\forall m \geq N$, $\forall p \in \mathbb{N}$: $\vec{x}^{m+p} \in \mathring{B}_\delta(\vec{a}) \cap X$;

Из усл-я Коши $\Rightarrow$ $|f(\vec{x}^{m+p}) - f(\vec{x}^m)| < \varepsilon$ $\forall m \geq N$, $\forall p \in \mathbb{N}$.

Значит, числовая посл-ть $\{f(\vec{x}^m)\}$ фундаментальна $\Rightarrow$ сходится.

Покажем, что предел $\{f(\vec{x}^m)\}$ не зависит от выбора посл-ти $\{\vec{x}^m\}$. Пусть $\vec{x}^{m'} \to \vec{a}$, $\vec{x}^{m'} \neq \vec{a}$; $\vec{x}^{m''} \to \vec{a}$, $\vec{x}^{m''} \neq \vec{a}$; $f(\vec{x}^{m'}) \to b'$; $f(\vec{x}^{m''}) \to b''$.

Рассм. посл-ть $\{\vec{x}^m\} = \{\vec{x}^{1'}, \vec{x}^{1''}, \vec{x}^{2'}, \vec{x}^{2''}, \dots\}$;

тогда $\vec{x}^m \to \vec{a}$, $\vec{x}^m \neq \vec{a}$ $\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{m\to+\infty} f(\vec{x}^m) = b$.

Посл-ти $\{f(\vec{x}^{m'})\}$ и $\{f(\vec{x}^{m''})\}$ – подпосл-ти сх-ся посл-ти $\{f(\vec{x}^m)\}$ $\Rightarrow$ $b' = b'' = b$. **ч.т.д.**